L'objet de ce problème est l'étude des suites de polynômes à coefficients réels $(P_n)_{n\geq 0}$ satisfaisant aux 3 conditions (C) suivantes :

(C)

(1) $P_0(x) = 1$

(2) P_1 n'est pas le polynôme nul

(3) Pour tout entier naturel n, pour tous réels x et y on a :

$$P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)\,P_{n-k}(y)$$

On ne distingue pas un polynôme et la fonction polynôme associée.

Tout résultat d'une question, même non démontré, pourra être utilisé dans les questions suivantes.

Partie I -

Dans cette partie, après quelques exemples de suites $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifiant (C), on en donne une construction générale.

I.A -

I.A.1) La suite $(P_n)_{n\geq 0}$ est définie par :

$$P_0(x) = 1$$

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!} \qquad \text{pour } n \geq 1$$

Montrer que cette suite vérifie (C).

I.A.2) On considère la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$P_0(x) = 1$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}x(x+n)^{n-1} \qquad \text{pour } n \geq 1$$

a) Vérifier, pour $n \geq 1$, la relation $P'_n(x) = P_{n-1}(x+1)$.

b) En déduire que cette suite $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifie (C).

I.B -

I.B.1) $(P_n)_{n\geq 0}$ désigne maintenant une suite quelconque vérifiant (C).

a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $P_n(0) = 0$.

b) Montrer que P_1 est de degré 1.

c) On pose $P_1(x) = a_1 x$. Monter que P_n est de degré n et expliciter son terme de degré n en fonction de a_1.

I.B.2) Pour tout $n \geq 1$ on pose $a_n = P'_n(0)$. Établir, pour tout $n \geq 1$, la relation :

$$P'_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}P_k(x).$$

I.B.3) Réciproquement on se donne une suite réelle $(a_n)_{n\geq 1}$, avec $a_1 \neq 0$

a) Montrer qu'il existe une suite et une seule $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifiant les 3 conditions (C') suivantes :

(C')

(1) $P_0(x) = 1$

(2) $P_n(0) = 0$ pour $n \geq 1$

(3) $P'_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}P_k(x)$ pour $n \geq 1$

b) Soit :

$$u_n(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n \quad \text{et} \quad v_n(x,t) = e^{x u_n(t)}$$

Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(\pi_n)_{n\geq 0}$ tels que, pour tout entier n donné,

$$v_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \pi_k(x)\,t^k + t^n \varepsilon_n(x,t)$$

où, pour x fixé, $\varepsilon_n(x,t)$ tend vers zéro quand t tend vers zéro.

Montrer que la suite (π_n) vérifie (C) et (C'). En déduire que $\pi_n = P_n$ pour tout n et que (C) et (C') sont équivalentes.

Partie II -

Dans cette partie, sauf en II.3, on considère une suite de polynômes vérifiant les conditions équivalentes (C) et (C') et possédant la propriété suivante :

la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$, où $(a_n)_{n\geq 1}$ est la suite définie en I par $a_n = P'_n(0)$, a un rayon de convergence R non nul (éventuellement infini).

CONCOURS COMMUN CENTRALE P' Math 1

On se propose d'étudier $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n$.

Pour $|t| < R$ on pose

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n \qquad \text{et} \qquad \tilde{f}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|(|t|)^n$$

II.1)

a) Établir, pour x réel, $|t| < R$ et $n \geq 0$, les majorations suivantes

$$\left|t^n P'_n(x)\right| \leq \tilde{f}(t)\, e^{|x|\tilde{f}(t)} \qquad \text{et} \qquad \left|t^n P_n(x)\right| \leq e^{|x|\tilde{f}(t)}$$

On pourra raisonner par récurrence et utiliser les conditions (C').

b) En déduire que, pour tout x réel fixé, les séries entières en t

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} P'_n(x)t^n$$

ont un rayon de convergence au moins égal à R.

II.2) On suppose, dans cette question, t fixé dans]- R, R [et x variable.

a) Montrer que la convergence de la série de fonctions de la variable x

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P'_n(x)t^n$$

est normale sur tout intervalle fermé [- M, M] de $\mathbb{R}$.

(On pourra considérer par exemple $r^n|P'_n(x)|\left|\frac{t}{r}\right|^n$, r étant convenablement choisi).

b) On pose

$$S_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n.$$

Montrer que S_t est une fonction de x dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une relation entre la dérivée $S'_t(x)$ de cette fonction de x, $S_t(x)$ et f(t).

c) En déduire

$$S_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n = e^{xf(t)}$$

II.3) Réciproquement on se donne une série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$, avec $a_1 \neq 0$ de rayon de convergence non nul R, de somme f (t).

Montrer que la fonction de t, $t \to e^{xf(t)}$, définie pour $|t| < R$, est, pour tout réel x fixé, développable en série entière sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n,$$

où la suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifie (C).

II.4) Déterminer f (t) et R dans les cas suivants :

a)

$$P_0(x) = 1$$

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!} \qquad \text{pour } n \geq 1$$

b)

$$P_0(x) = 1 \qquad\qquad P_1(x) = x$$

$$\text{pour } n \geq 2 \quad P'_n(x) = P_{n-2}(x) + P_{n-1}(x) \quad \text{et} \quad P_n(0) = 0$$

c)

$$P_0(x) = 1$$

$$\text{pour } n \geq 1 \quad P'_n(x) = P_{n-1}(x) - P'_{n-1}(x) \quad \text{et} \quad P_n(0) = 0$$

Partie III -

Dans cette partie on reprend la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ du I.A.2.

On lui associe la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que $a_n = P'_n(0)$.

On rappelle la relation $P'_n(x) = P_{n-1}(x+1)$ pour $n \geq 1$.

III.1)

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$.

Soit, pour $|t| < R$, $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$.

b) En exprimant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P'_n(x)\,t^n$$

de deux façons différentes, en fonction de x et de f (t), montrer que l'on a, pour $|t| < R$,

$$te^{f(t)} = f(t).$$

III.2)

a) Étudier les variations de la fonction de la variable réelle u définie par $u \to ue^{-u}$.

b) En déduire que f est la fonction réciproque d'une fonction simple φ.

c) Étudier les variations de f et φ et construire leurs courbes représentatives.

d) Calculer la borne inférieure m de f à 10^{-3} près.

Partie IV -

On considère une suite

$(P_n)_{n \geq 0}$ vérifiant (C) et (C'), et la suite

$(a_n)_{n \geq 1}$ associée, définie par

$a_n = P'_n(0)$ pour $n \geq 1$, a_1 étant non nul.

Comme au I.B.3.b) on pose

$$u_n(t) = a_1 t + \ldots + a_n t^n$$

On ne suppose plus que la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$ a un rayon de convergence non nul.

IV.1) En utilisant (C') établir, pour n donné,

$$u_n(t)\, e^{x u_n(t)} = \sum_{k=0}^{n} P'_k(x)\, t^k + t^n \varepsilon_1(x,t)$$

où, pour x fixé, $\lim_{t \to 0} \varepsilon_1(x,t) = 0$.

Plus généralement montrer, pour n donné, et pour tout entier $i \geq 2$

$$[u_n(t)]^i e^{x u_n(t)} = \sum_{k=0}^{n} P_k^{(i)}(x)\, t^k + t^n \varepsilon_i(x,t)$$

où, pour x fixé, $\lim_{t \to 0} \varepsilon_i(x,t) = 0$

IV.2) Montrer qu'il existe une suite unique de réels $(b_n)_{n \geq 1}$ telle que l'on ait, pour tout entier $n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i [u_n(t)]^i = t + t^n \alpha_n(t)$$

où $\alpha_n(t)$ tend vers zéro quand t tend vers zéro. On ne cherchera pas à calculer b_i pour $i \geq 3$. On déterminera b_1 et b_2. (On pourra considérer la fonction réciproque de la restriction de u_n à un voisinage convenable de zéro).

IV.3) Montrer qu'il existe un endomorphisme U, et un seul de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$U(P_0) = 0 \text{ et pour } n \geq 1 \; U(P_n) = P_{n-1}.$$

IV.4)

a) Établir, pour tout n donné, $n \geq 1$, la relation

$$\sum_{k=0}^{n} t^k \left(\sum_{i=1}^{n} b_i P_k^{(i)}(x) \right) = te^{x u_n(t)} + t^n \eta_n(x,t)$$

où, pour x fixé, $\eta_n(x, t)$ tend vers zéro quand t tend vers zéro.

b) En déduire, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$

$$U(P) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i P^{(i)}$$

••• FIN •••